

集合及其运算

回顾

问题1：什么叫证明？

- 表明定理为真的有效论证（演绎推理）

问题2：常见的证明方法有哪些？

- 直接证明、间接证明、归谬法、分情形证明、等价性证明、存在性证明、唯一性证明

问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想？

- 尚未被证明的可能为真的陈述：费马大定理、四色定理、哥德巴赫猜想、庞加莱定理、黎曼猜想

本节提要

问题1：什么是集合？

问题2：集合的基本概念有哪些？

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明？

引言

4

- 集合论是现代数学的基础理论
 - ▣ 几乎所有的数学对象（数、函数、几何对象等）都可以通过集合来定义；换句话说，集合论给本来各自独立的数学对象提供了统一的框架基础
- 朴素集合论（课程主要关注点）
 - ▣ 由康托尔（**Georg Cantor**）创立
- 公理集合论
 - ▣ 为了解决朴素集合论的悖论（例如罗素悖论）而诞生
 - ▣ 其中最常用的是**ZF**公理系统（**Zermelo-Fraenkel**）及其扩展**ZFC**公理系统（**C**指**Axiom of Choice**）
 - ▣ 公理系统为数学推理提供了严格的基础
 - 如果一个数学命题在**ZFC**公理系统中得到证明，就意味着它被普遍认为是“真”的；那是不是所有为真的命题都能被证明呢？

引言

5

□ 从朴素集合论到公理集合论

▣ 1900年国际数学大会

- 庞加莱 (H. Poincare) : “借助集合论...可以建造数学大厦...今天我们可以宣称绝对的严密已经实现了!”

▣ 随后发现了Cantor集合论中的一些悖论

- 如1901年的罗素悖论：理发师宣称“要给所有不自己理发的人理发”

现在的问题是 谁该为理发师理发？

- 弗雷格 (G. Frege) 评论：当大厦竣工时基础却动摇了

引言

6

- 朴素集合论可以依据**概括原则** $\{x \mid P(x)\}$ 构建集合
 - 对于任意一个性质 $P(x)$ ，都存在一个集合 S ，它恰好包含所有满足性质 $P(x)$ 的对象
- 罗素悖论：概括原则未必产生集合
 - 定义性质 P ： x 是不包含自身的集合，即 $R = \{x \mid x \notin x\}$
 - R 是所有不包含自身的集合的集合，那么 R 本身是否包含自身？
 - 若集合 R 属于 R ，根据定义 R 不属于 R ；若 R 不属于 R ，根据定义 R 属于 R
 - 即若 R 为集合则 $R \in R \leftrightarrow R \notin R$ ，故 R 不为集合

引言

7

- 罗素悖论是集合论迄今为止最著名的悖论，因其形式简单而意义深远。人们因此重新审视集合论，修改概括原则，用形式化方法讨论集合论，最终导致公理集合论的诞生

- 公理化集合论如何解决罗素悖论：

在朴素集合论基础上，通过公理对集合加以限制。

例如：ZF公理化集合论的正则公理避免了罗素悖论

正则公理：每一个非空集合 x ，总包含着一元素 y ，使 x 与 y 为不相交。

对于集合 x ，根据正则公理有： $\{x\}$ 里面有一个元素跟 $\{x\}$ 交集为空，即 $x \cap \{x\} = \emptyset$ ，即 $x \notin x$ 。

康托与集合论的诞生

8

- 格奥尔格·康托 (**Georg Cantor, 1845-1918**) 生于俄国圣彼得堡，后移居德国。他在柏林大学获得博士学位，研究核心为函数的三角级数展开。在研究过程中，康托发现有必要将具有特定性质的点归为一类，由此创立了点集概念，并将其推广至一般性集合。
- 1. 集合论作为数学分支的开端通常以康托的工作为标志，进入二十世纪后逐步成为所有数学分支的共同理论基础。
- 2. 这一理论深刻影响了数学的语言体系和推理方式，使“集合”成为描述数学对象的基本范式。
- 3. 高中数学已涉及集合的基础知识，大学阶段将引入更严格的公理化定义和丰富的运算规则。

集合的概念

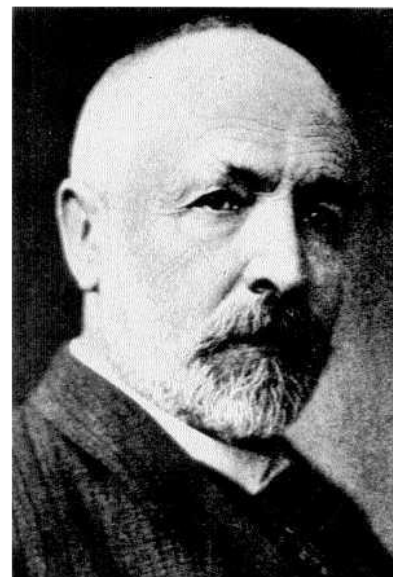
9

- 集合没有明确的定义，**G.Cantor**给出了一种刻划：

“吾人直观或思维之对象，如为**相异而确定**之物，其**总括之全体**即谓之集合，其组成此集合之物谓之集合之元素。

通常用大写字母表示集合，如 A 、 B 、 C 等，用小写字母表示元素，如 a 、 b 、 c 等。若集合 A 系由 a 、 b 、 c 等诸元素所组成，则表如 $A=\{a,b,c,\dots\}$ ，而 a 为 A 之元素，亦常用 $a\in A$ 之记号表之者， a 非 A 之元素，则记如 $a\notin A$ 。”

（肖文灿译于1939年，《集合论初步》，商务印书馆）



例

10

- 1,2,3为集合, “自然数之全体”为集合; 但诸如“甚大之数”或“与 P 点接近之点”则不能为集合, 因其界限不清
- 集合中的元素互异, 我们把元素的重复看作一次出现, 如 $\{2,2,3,3\}=\{2,3\}$
- Cantor提到的“总括之全体”之“总括”, 可由集合的外延公理和概括原则来描述

外延公理与概括原则

11

- **(ZF.1) 外延公理**：集合由其元素完全决定

$$A=B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

故证明集合 $A=B$ 只需证明 $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

- **概括原则**：对于人们直观或者思维之对象 x 的任一性质 $P(x)$ ，存在集合 S 的元素恰为具有性质 P 的那些对象，记为 $S=\{x \mid P(x)\}$ 。从而对任何 a ， $a \in S \leftrightarrow P(a)$ ，例如 $\{1,2,3\}=\{x \mid x=1 \vee x=2 \vee x=3\}$

本节提要

问题1：什么是集合？

- 集合无定义，通过外延法、概括法描述

问题2：集合的基本概念有哪些？

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明？

集合的大小

13

□ 有限集合及其基数

- 若S恰有 n 个不同的元素， n 是自然数，就说S是有限集合，而 n 是S的基数，记作 $|S|=n$

□ 无限集合

- 如果一个集合不是有限的，就说它是无限的。

子集

14

- A 为 B 之 **子集** (记为 $A \subseteq B$) 指 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$,
- A 为 B 之 **真子集** (记为 $A \subset B$) 指 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ 。
- $A \not\subseteq B$ 是指 $\exists x(x \in A \wedge x \notin B)$

- 例: $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$, $A \subseteq A$, $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{R}$

- 命题: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \leftrightarrow (\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A})$
 - ▣ 该命题也常被用来证明集合相等

空集

15

- (ZF.3*) 空集公理：存在一个集合其没有任何元素，称这种集合为空集（**null set**），记作 $\emptyset$ ，其为任何集合（包含空集本身）之子集

- 命题：空集是唯一的
 - ▣ 证明：设 $\emptyset_1, \emptyset_2$ 皆为空集，则根据空集的定义，有 $\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \wedge \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$ ，根据集合相等的定义有 $\emptyset_1 = \emptyset_2$

空集

16

- 空集本身是一个集合，也可以做为另一个集合的元素或子集，故： $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ， $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ ；但因为空集不含任何元素，故 $\emptyset \notin \emptyset$ ， $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
- 定义：若集合 A 含有 n 个元素，则称 A 为 n 元集，记为 $|A|=n$ ；易见， $\emptyset$ 是0元集， $\{\emptyset\}$ 是1元集

由集合定义自然数

17

- 在公理集合论中，集合是自然数的基础
 - ▣ 定义：设 a 为集合，称 $a \cup \{a\}$ 为 a 的**后继**，记作 $a+$

- ▣ 定义(von Neumann):

$$\text{令 } 0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 0^{++}, \dots, n = 0^{\overbrace{+ \dots +}^n}$$

$$0 := \emptyset$$

$$1 := 0^+ = \{\emptyset\}$$

$$2 := 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 := 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

...

有关自然数的若干命题

18

- 对于自然数的 von Neumann 定义，可定义：

$m \leq n \stackrel{\text{def}}{=} m \subseteq n$ ，于是有以下命题成立：

- (1) $n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

- (2) $n \in n + 1$

- (3) $n \leq n$

- (4) $n \leq m \leq 1 \rightarrow n \leq 1; n \leq m \leq n \rightarrow n = m$

- (5) $m \leq n \vee n \leq m$

无穷公理

19

- 定义：设 A 是集合，称 A 为归纳集(inductive set)指： $\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A)$
- (ZF.7) 无穷公理： $\exists A(\emptyset \in A \wedge (\forall x \in A)(x^+ \in A))$
- 按照 von Neumann 的定义， $0 = \emptyset$ ， $n+1 = n^+$ ，从而可以定义出单个的自然数，但不能说明全体自然数集合 $\mathbf{N}$ 的存在性，而由无穷公理可以定义 $\mathbf{N}$

定义： $\mathbf{N} \stackrel{\text{def}}{=} \cap \{A \mid A \text{ 为归纳集} \} =$

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots\}$$

幂集

20

□ **(ZF.8) 幂集公理**：集合 A 的幂集 $P(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$, 即由集合 A 的全体子集构成的集合

□ 例： $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $PP(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
 $PPP(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
 $P(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

□ 若 $|A| = n$, 则 $|P(A)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
故集合 A 的幂集的另一种记法为 2^A

□ 若 $P(A) \subseteq P(B)$, 则 $A \subseteq B$

$\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X)$

$\mathbb{P}(X)$

$P(X)$

笛卡尔积

21

- 集合元素是无序的，如何表达有序的聚集？
- 有序n元组 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，下标代表元素位置
 - ▣ 两个有序n元组相等当且仅当每一对对应的元素都相等
- 定义：集合A和B的笛卡尔积用 $A \times B$ 表示：
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$
 - ▣ 注：笛卡尔积 $A \times B$ 的子集R是集合A到集合B的关系
 - ▣ 注：笛卡尔积可以扩展到多个集合：
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i=1, 2, \dots, n\}$$
 - ▣ 注： $A \times B \times C$ 与 $(A \times B) \times C$ 不同

笛卡尔积

22

□ 考察有序偶

□ 有序偶 $(a,b)=(x,y)$ 当且仅当 $a=x, b=y$

□ 通过集合定义： $(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$

□ 注： $A \times B$ 与 $B \times A$ 不同。何种情形下， $A \times B = B \times A$ ？

□ 性质： ■ (1) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

■ (2) $A \times B = B \times A \Leftrightarrow [(A = \emptyset) \vee (B = \emptyset) \vee (A = B)]$

■ (3) 分配律： $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$$

本节提要

问题1：什么是集合？

- 集合无定义，通过外延法、概括法描述

问题2：集合的基本概念有哪些？

- 子集、空集、幂集、自然数（归纳集）、笛卡尔积

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明？

集合运算

24

□ 为了由已有集合产生新的集合，除幂集运算外还引入一些集合上的运算

□ 定义：

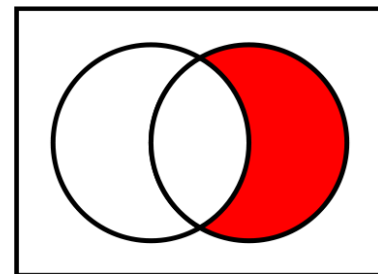
□ (ZF.5) 集合的并： $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

□ 集合的交： $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

□ 集合的相对补： $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

□ 集合的对称差：

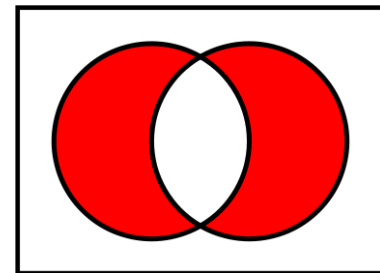
$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$



例

25

□ 试证明对称差 $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$



证明：根据对称差定义， $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$ ，任取 $x \in A \oplus B$ ，即 $x \in (A - B)$ 或 $x \in (B - A)$ 。

- 1. 假设 $x \in (A - B)$ ，根据相对补定义，有 $x \in A$ 且 $x \notin B$ ，故而 $x \in (A \cup B)$ 但 $x \notin (A \cap B)$ ，根据相对补定义，有 $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ ；
- 2. 假设 $x \in (B - A)$ ，根据相对补定义，有 $x \in B$ 且 $x \notin A$ ，故而 $x \in (A \cup B)$ 但 $x \notin (A \cap B)$ ，根据相对补定义，亦有 $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ 。

综上，对于任意 $x \in A \oplus B$ ，皆有 $x \in (A \cup B) - (A \cap B)$ ，反之亦然（**需要加入证明内容**）。由集合相等定义， $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 。□

广义交和广义并

26

□ 定义（广义交与广义并）：

▣ **集合的广义并**：设***A***为集合，***A***的所有元素的并称为集合***A***的广义并，记为：

$$\bigcup A = \{x \mid \exists y (y \in A) \wedge (x \in y)\}$$

▣ **集合的广义交**：设***A***为非空集合，***A***的所有元素的交称为集合***A***的广义交，记为：

$$\bigcap A = \{x \mid \forall y (y \in A \rightarrow x \in y)\}$$

■ 注：限制条件为***A***非空， $\bigcap \emptyset$ 无意义

例

27

□ 求以下六个集合的广义并与广义交

$$\mathcal{A}_1 = \{a, b, \{c, d\}\}, \mathcal{A}_2 = \{\{a, b\}\}, \mathcal{A}_3 = \{a\},$$

$$\mathcal{A}_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \mathcal{A}_5 = a (a \neq \emptyset), \mathcal{A}_6 = \emptyset,$$

$$\cup \mathcal{A}_1 = a \cup b \cup \{c, d\}, \quad \cap \mathcal{A}_1 = a \cap b \cap \{c, d\},$$

$$\cup \mathcal{A}_2 = \{a, b\}, \quad \cap \mathcal{A}_2 = \{a, b\},$$

$$\cup \mathcal{A}_3 = a, \quad \cap \mathcal{A}_3 = a$$

$$\cup \mathcal{A}_4 = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}, \quad \cap \mathcal{A}_4 = \emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset,$$

$$\cup \mathcal{A}_5 = \cup a, \quad \cap \mathcal{A}_5 = \cap a$$

$$\cup \mathcal{A}_6 = \emptyset, \quad \cap \mathcal{A}_6 = E \text{ (或者无定义)}$$

空集的广义交不是一个集合

28

Theorem

Consider the set of sets $\mathbb{S}$ such that $\mathbb{S}$ is the empty set $\emptyset$.

Then the intersection of $\mathbb{S}$ is $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{S} = \emptyset \implies \bigcap \mathbb{S} = \mathbb{U}$$

where $\mathbb{U}$ is the universe.

A paradoxical result.

Proof

Let $\mathbb{S} = \emptyset$.

Then from the definition:

$$\bigcap \mathbb{S} = \{x : \forall X \in \mathbb{S} : x \in X\}$$

Consider any $x \in \mathbb{U}$.

Then as $\mathbb{S} = \emptyset$, it follows that:

$$\forall X \in \mathbb{S} : x \in X$$

from the definition of vacuous truth.

It follows directly that:

$$\bigcap \mathbb{S} = \{x : x \in \mathbb{U}\}$$

That is:

$$\bigcap \mathbb{S} = \mathbb{U}$$



最小上界和最大下界

29

□ 包含关系下两个集合的最小上界和最大下界

□ 最小上界:

■ $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ ----A和B的上界

■ 对任意X, 若 $A \subseteq X, B \subseteq X$, 则 $A \cup B \subseteq X$ ----最小上界

□ 最大下界:

■ $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ ----A和B的下界

■ 对任意X, 若 $X \subseteq A, X \subseteq B$, 则 $X \subseteq A \cap B$ ----最大下界

集合与谓词逻辑

30

□ 在量化逻辑表达式中使用集合符号

■ $\forall x \in S(P(x))$ 代表 $\forall x(x \in S \rightarrow P(x))$

■ $\exists x \in S(P(x))$ 代表 $\exists x(x \in S \wedge P(x))$

■ 举例

■ $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0): \forall x(x \in \mathbb{R} \rightarrow (x^2 \geq 0))$

■ $\exists x \in \mathbb{Z}(x^2 = 1): \exists x(x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 1)$

$$\begin{aligned} & \forall_{x \in S} P(x) \\ & \exists_{x \in S} P(x) \end{aligned}$$

□ 逻辑表达式的真值集合, $\{x \in D \mid P(x)\}$

■ 例: $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = x\}$, $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 2\}$, $\{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x^2 = 2\}$

$$\{x \in X \mid p(x)\} \subseteq \{x \in X \mid q(x)\} \text{ 与 } \forall_{x \in X} (p(x) \rightarrow q(x))$$

集合恒等式

31

等 式	名 称
$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	恒等律
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	支配律
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	幂等律
$\sim(\sim A) = A$	补集律
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	交换律

集合恒等式

32

等 式	名 称
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	结合律
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	分配律
$\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$ $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$	德摩根定律
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	吸收律
$A \cup \sim A = U$ $A \cap \sim A = \emptyset$	补律

集合恒等式

33

□ 定理：设 **A, B, C** 为任意集合

□ **DeMorgan律：**

$$\mathbf{A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)}$$

$$\mathbf{A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)}$$

□ **幂集性质：**

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)}$$

$$\mathbf{P(A \cup B) \supseteq P(A) \cup P(B)}$$

集合公式的基本证明方式

34

□ **方法一**：直接使用集合包含或相等的定义

□ 例： $A \cup B = B \Rightarrow A \subseteq B$

□ 分析：待证结论为 $A \subseteq B$ ，即 $\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ ，因此，证明框架如下：

对任意 x ，假设 $x \in A$ ，{…适当内容…}
因此， $x \in B$ ，故 $A \subseteq B$. □

□ 证明：对任意 x ，假设 $x \in A$ ，根据集合并的定义有 $x \in A \cup B$ ，由已知条件 $A \cup B = B$ ，因此 $x \in B$ ，故 $A \subseteq B$. □

集合公式的基本证明方式

35

- **方法二**：利用运算定义作逻辑等值式推演
 - 例：试证 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

$$\begin{aligned}x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin (B \cup C)) \\&\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\&\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\&\Leftrightarrow (x \in (A - B)) \wedge (x \in (A - C)) \\&\Leftrightarrow x \in ((A - B) \cap (A - C))\end{aligned}$$

集合公式的基本证明方式

36

- **方法三**：利用已知恒等式或等式作集合代数推演
 - 例1：已知 $A \cap B = A$ ，证明 $A - B = \emptyset$
 - 例2： $A \cup (A \cap B) = A$
 - 例3：已知 $A \oplus B = A \oplus C$ ，证明 $B = C$

$$\begin{aligned} A - B &= A \cap \sim B \\ &= (A \cap \sim B) \cup (A \cap \sim A) \\ &= A \cap (\sim B \cup \sim A) \\ &= A \cap \sim(A \cap B) \\ &= A \cap \sim A = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= (A \cap E) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (E \cup B) = A \cap E = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \emptyset \oplus B = (A \oplus A) \oplus B \\ &= A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C) \\ &= (A \oplus A) \oplus C = \emptyset \oplus C = C \end{aligned}$$

集合公式的基本证明方式

37

□ **方法四**：循环证明一系列逻辑等值式

□ 例：试证 $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$

□ 证明路径：(1) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (1)

□ 只要完成上述证明，由循环关系就证明了上述诸多充分必要关系

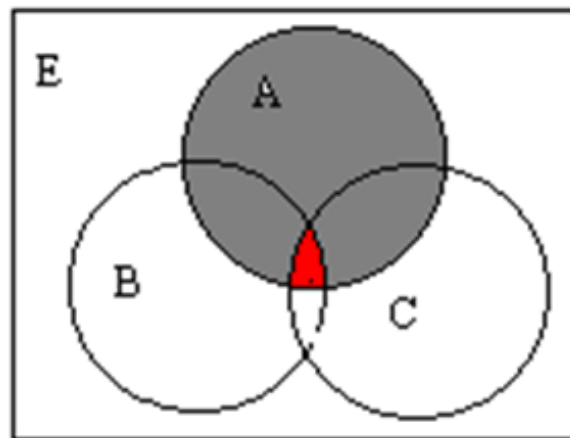
□ 证明略

集合公式的基本证明方式

38

- 其它证明方法：文氏图也可帮助推测结论（但不能代替证明的过程）
 - ▣ 例： $(A-B) \cup (A-C) = A$ 成立的充分必要条件？

充要条件： $A \cap B \cap C = \emptyset$



本节小结

问题1：什么是集合？

- 集合无定义，通过外延法、概括法描述

问题2：集合的基本概念有哪些？

- 子集、空集、幂集、自然数（归纳集）、笛卡尔积

问题3：如何进行集合运算与集合公式证明？

- 集合的交并补、对称差、广义并、广义交
- 集合定义、恒等式、逻辑推演等

恩斯特·策梅洛

40

- 恩斯特·策梅洛(Ernst Zermelo, 1871–1953), 德国数学家、逻辑学家。柏林大学博士, 并从当时的世界数学中心哥廷根大学获职。柏资格。在希尔伯特的鼓励下, 他证明了著名的良序定理, 成为世界著名数学家。可是, 他的证明在当时也引起不少争论, 例如很多数学家不乎允许他的证明所依赖的选择公理。另外, 他的公理系统似很多数学家感到不满。他证明了著名的良序定理, 成为世界著名数学家。可是, 他的证明在当时也引起不少争论, 例如很多数学家不乎允许他的证明所依赖的选择公理。另外, 他的公理系统似很多数学家感到不满。
- 在入职哥廷根之后, 策梅洛又发表了他的集合论公理系统。经过其他数学家和弗兰克尔的不断努力, 这个公理系统不断得到完善。和弗兰克尔两人, 称这个公理系统为策梅洛-弗兰克尔(ZF)公理系统。在过发兰时, ZF公理系统, 和它的变种ZFC公理系统, 不仅成为现代集合论的基础, 而且已成为整个现代数学的基础。

ZFC公理化集合论

41

- 外延公理：（**Axiom of extensionality**）两个集合相同，当且仅当它们拥有相同的元素。
- 正则公理：（**Axiom of regularity / Axiom of foundation**）每一个非空集合 x ，总包含着一元素 y ，使 x 与 y 为不相交。
- 分类公理：（**Axiom schema of specification / axiom schema of separation / axiom schema of restricted comprehension**）或称子集公理，给出任何集合及命题 $P(x)$ ，存在着一个原来集合的子集包含而且只包含使 $P(x)$ 成立的元素。
- 配对公理：（**Axiom of pairing**）假如 x, y 为集合，那就有另一个集合 $\{x, y\}$ 包含 x 与 y 作为它的仅有元素。
- 并集公理：（**Axiom of union**）每一个集合也有一个并集。也就是说，对于每一个集合 x ，也总存在着另一个集合 y ，而 y 的元素也就是而且只会是 x 的元素的元素。
- 替代公理：（**Axiom schema of replacement**）若一个可定义的函数 f 的定义域为一集合，且对定义域的任一 x ， $f(x)$ 也都是集合，则 f 的值域会是一个集合的子集。
- 无穷公理：（**Axiom of infinity**）存在着一个集合 x ，空集 $\{\}$ 为其元素之一，且对于任何 x 中的元素 y ， $y \cup \{y\}$ 也是 x 的元素。
- 幂集公理：（**Axiom of power set**）每一个集合也有其幂集。那就是，对于任何的 x ，存在着一个集合 y ，使 y 的元素是而且只会是 x 的子集。
- 选择公理：（**Axiom of choice, Zermelo's version**）给出一个集合 x ，其元素皆为互不相交的非空集，那总存在着一个集合 y （ x 的一个选择集合），包含 x 每一个元素的仅仅一个元素。

ZFC公理化集合论

42

选择公理 (Axiom of choice)

- 任一非空集合族 $(S_i)_{i \in I}$ 均存在元素族 $(s_i)_{i \in I}$, $\forall i \in I. s_i \in S_i$

或良序定理 (Well-ordering theorem)

$$\forall X \exists R (R \text{ well-orders } X).$$

它说了一句听起来完全是“废话”的大实话，但一旦你承认这句废话，它就会像多米诺骨牌一样，推出大量匪夷所思、甚至颠覆物理直觉的结论。