

证明方法

回顾

问题1：如何基于命题逻辑进行推理？

- 蕴含永真式导出推理规则

问题2：什么是(一阶)谓词逻辑？

- 命题逻辑+谓词+量词；量化表达式

问题3：如何基于谓词逻辑进行推理？

- 命题逻辑的推理+全称/存在 例示/生成

本节提要

问题1：什么叫证明？

问题2：常见的证明方法有哪些？

问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想？

定理与证明

4

□ 定理(theorem)

- 能够被证明为真的陈述，通常是比较重要的陈述。

□ 证明(proof)

- 表明陈述(定理)为真的有效论证。

□ 定理证明中可以使用的陈述:

- 公理(不证自明的基本事实)
- (当前)定理的前提
- 已经证明的定理(推论、命题、引理)

例

5

- 定理的陈述(举例)
 - 如果 $x > y$ ，其中 x 和 y 是正实数，那么 $x^2 > y^2$ 。
- 如何表达
 - $\forall x \forall y ((x > y) \rightarrow (x^2 > y^2))$ //论域为正实数
- 如何证明
 - 定理的陈述为: $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
 - 先证明，对论域中的任一元素 c ， $P(c) \rightarrow Q(c)$
 - 再使用全称引入，得到 $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

归纳推理的证明方式

6

证明的本质是“**保证真实性**”，其涵义根据领域的不同有所差异：

- **科学**中的“证明”指利用**归纳推理**（inductive reasoning）去证实（prove）某个**假设**（hypothesis）
- 人们将大量特殊的信息收集（归纳）起来并根据自身的知识和经验去观察，并推断（推理）哪些是真实的
- 此类“证明”不产生**定论**（mathematical certainty）

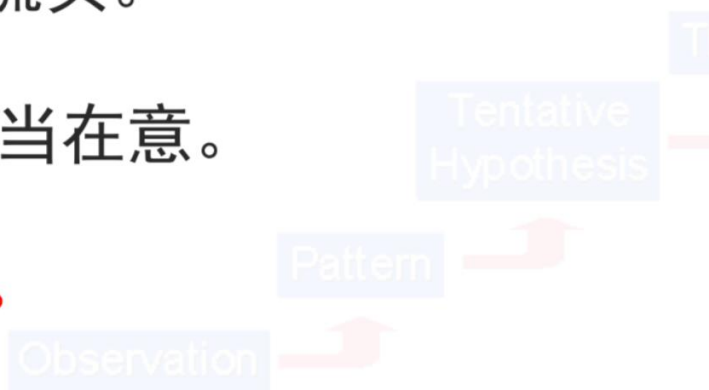
归纳推理的证明方式

7

■ 日常生活中“证明”的例子：

- 我们观察到：小王今早上课迟到了。
- 我们观察到：小王今天没梳头。
- 经验：小王平时对发型相当在意。
- 结论：小王今天睡过头了。

■ 这类“证明”方式一般在数学中用于提出假设



演绎推理的证明方式

8

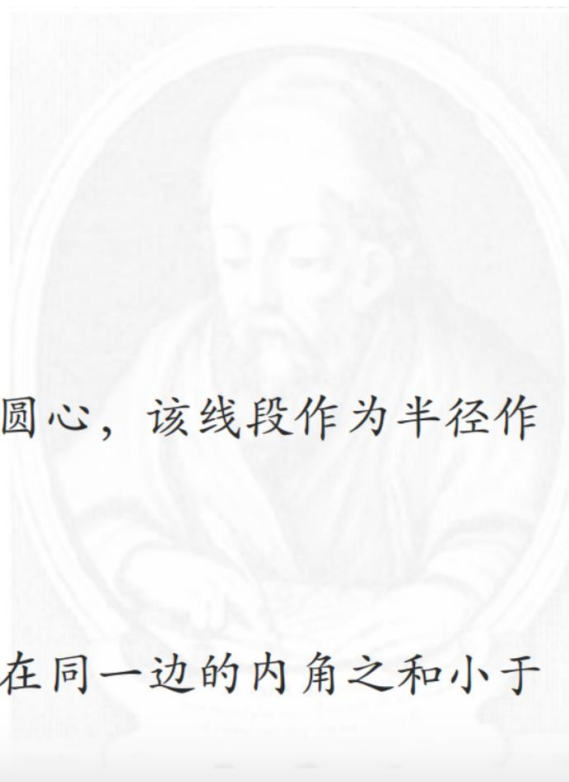
证明的本质是“**保证真实性**”，其涵义根据领域的不同有所差异：

- **数学**中的“证明”指利用**演绎推理**（deductive reasoning）和逻辑规则去推证某个**命题**
- 数学证明中每一步推理过程都根据某些前提条件（premise）展示出一个结论——称为**逻辑推论**
- 所有的证明过程必须是**严密的**（rigorous），每一步都必须提供确信的证据来支持中间结论，最终结论称为系统中的**定理**（theorem）

演绎推理的证明方式

9

- 用于数学的证明方式称为**形式化证明**或**推导**（derivation）
- **定义（形式化证明）**：对一个命题的基于**公理化系统**的一系列**逻辑演绎**的**有限过程**
- **例**：欧几里德平面几何的公理集合
 - 公理1. 任意两点可以通过一条直线连接。
 - 公理2. 任意线段可无限延伸为一条直线。
 - 公理3. 给定任意线段，可以以其一个端点作为圆心，该线段作为半径作一个圆。
 - 公理4. 所有直角都全等。
 - 公理5. 若两条直线都与第三条直线相交，并且在同一边的内角之和小于两个直角，则这两条直线在这一边必定相交。



本节提要

问题1：什么叫证明？

- 表明定理为真的有效论证（演绎推理）

问题2：常见的证明方法有哪些？

问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想？

直接证明法

11

- **证明方法：**证明“若 A 为真，则 B 为真”
- **理论依据：**“若 A 为真，则 B 为真” $\Rightarrow$ “ $A \rightarrow B$ 为真”
- **例：**

证明：若 n 是奇数，则 n^2 也是奇数.

证：因为 n 是奇数，故 $\exists k \in \mathbb{N}$ 使 $n = 2k + 1$ ，于是有：

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

故 n^2 是奇数.

□

间接证明法

12

- **证明方法：**证明逆否命题 “ $\neg B \rightarrow \neg A$ ” 为真
- **理论依据：**“ $A \rightarrow B$ 为真” $\Leftrightarrow$ “ $\neg B \rightarrow \neg A$ ” 为真
- **例：**

证明：若 n^2 是奇数，则 n 也是奇数.

证：只需证若 n 是偶数，则 n^2 也是偶数. 假设 $\exists k \in \mathbb{N}$, $n = 2k$, 于是有： $n^2 = (2k)^2 = 2(2k^2)$, 故 n^2 为偶数，从而原命题得证. $\square$

空证明法(前件假证明法)

13

- **证明方法：**要证“ $A \rightarrow B$ 为真”，可证“ A 为矛盾式”
- **理论依据：**“ A 为矛盾式” $\Rightarrow$ “ $A \rightarrow B$ 为真”
- **例：**

证明：空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集.

证：根据子集的定义 $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$ ，令
 $A = \emptyset$ ，则 $\emptyset \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x(\perp \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow T$ ，命题得证。 $\square$

	A	B	$A \rightarrow B$
(1)	0	0	1
(2)	0	1	1
(3)	1	0	0
(4)	1	1	1

平凡证明法(后件真证明法)

14

- **证明方法：**要证“ $A \rightarrow B$ 为真”，可证“ B 为永真式”
- **理论依据：**“ B 为永真式” $\Rightarrow$ “ $A \rightarrow B$ 为真”
- **例：**

证明：若 $a \leq b$ ，则 $a^0 \leq b^0$ 。

证：因为 $a^0 \leq b^0$ 恒为真，故命题得证。 $\square$

- 这种证明方式常在数学归纳法的“**奠基**”中出现

	A	B	$A \rightarrow B$
(1)	0	0	1
(2)	0	1	1
(3)	1	0	0
(4)	1	1	1

归谬法(反证法)

15

- **证明方法：**假设 A 真且 $\neg B$ 真，推出矛盾，即 $A \wedge \neg B \Rightarrow \perp$
- **理论依据：**“ $A \wedge \neg B \Rightarrow \perp$ ”为真 $\Leftrightarrow$ “ $A \wedge \neg B$ ”为假 $\Leftrightarrow$
“ $\neg(A \wedge \neg B)$ ”为真 $\Leftrightarrow$ “ $\neg A \vee B$ ”为真 $\Leftrightarrow$ “ $A \rightarrow B$ ”为真
- **例1：**

证明：若 $3n + 2$ 是奇数，则 n 也是奇数.

证：反设在题设条件下 n 为偶数，即 $\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k$ ，于是有： $3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ ，故 $3n + 2$ 为偶数，与题设矛盾！原命题得证. $\square$

归谬法

16

■ 例2:

证明： $\sqrt{2}$ 是无理数.

证：反设 $\sqrt{2}$ 为有理数，则其可写为 $\frac{p}{q}$ ($p, q \in \mathbb{N} \wedge (p, q) = 1$)

之形式，且 $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ ；那么有： $p^2 = 2q^2 \rightarrow p^2$ 为偶 $\rightarrow p$ 亦

为偶 $\rightarrow p^2$ 为4的倍数 $\rightarrow q^2$ 为偶 $\rightarrow q$ 为偶 $\rightarrow p$ 与 q 有公因子2.

这与 $(p, q) = 1$ 矛盾，故假设错误，原命题得证. $\square$

广义归谬法

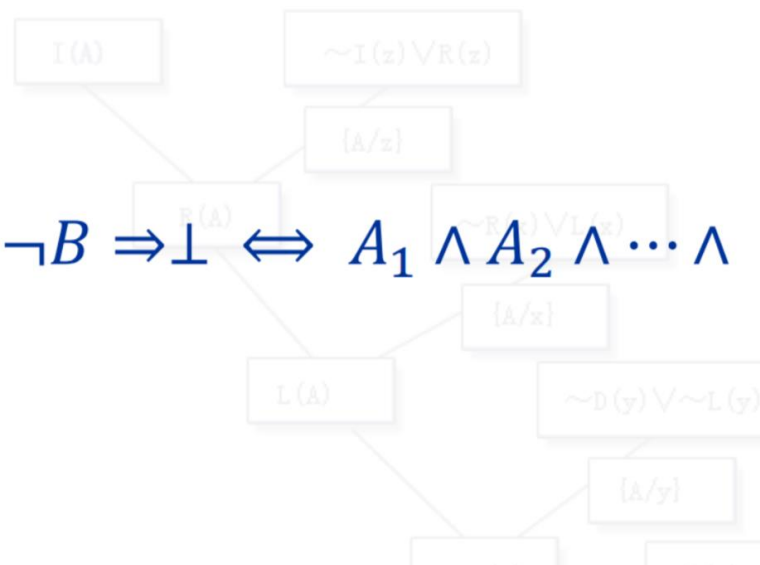
17

- **证明方法：** 假设 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 真且 $\neg B$ 真，推出矛盾，即

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow \perp$$

- **理论依据：** $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow \perp \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge$

$$A_k \Rightarrow B$$



穷举法(分情形证明)

18

- **证明目标:** $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k \rightarrow B$
- **证明方法:** 证明 $A_1 \rightarrow B, A_2 \rightarrow B, \cdots, A_k \rightarrow B$ 皆为真
- **理论依据:** $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_k) \vee B \Leftrightarrow (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \cdots \wedge \neg A_k) \vee B \Leftrightarrow (\neg A_1 \vee B) \wedge (\neg A_2 \vee B) \wedge \cdots \wedge (\neg A_k \vee B) \Leftrightarrow (A_1 \rightarrow B) \wedge (A_2 \rightarrow B) \wedge \cdots \wedge (A_k \rightarrow B)$
- **例:**

证明: $\max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$.

证: 见下表.

穷举法

19

证明： $\max(a, \max(b, c)) = \max(\max(a, b), c)$.

证： 见下表.

情 况	$u=\max(b,c)$	$\max(a,u)$	$v=\max(a,b)$	$\max(v,c)$
$a \leq b \leq c$	c	c	b	c
$a \leq c \leq b$	b	b	b	b
$b \leq a \leq c$	c	c	a	c
$b \leq c \leq a$	c	a	a	a
$c \leq a \leq b$	b	b	b	b
$c \leq b \leq a$	b	a	a	a

穷举法

20

- 当 n 是一个正整数，且 $n \leq 4$ 时， $(n+1)^3 \geq 3^n$ 。
 - $n=1, 2, 3, 4$. (穷举)
- 当 n 是一个整数时，有 $n^2 \geq n$ 。
 - $n \leq 0$
 - $n \geq 1$

等价性证明

21

- 原理
 - $[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n] \Leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow p_1)]$
- 证明框架
 - $p_1 \Rightarrow p_2$
 - $p_2 \Rightarrow p_3$
 - ...
 - $p_n \Rightarrow p_1$
 - 因此, $p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n$ 。

存在性证明

22

- 证明目标
 - $\exists x P(x)$
- 构造性证明
 - 存在这样的正整数，有两种方式表示为正整数的立方和。
 - $1729=10^3+9^3=12^3+1^3$
- 非构造性证明
 - 存在无理数 x 和 y 使得 x^y 是有理数
 - $y^2=2, x=y^y, x^y=(y^y)^y=y^2=2$
 - 若 x 是无理数, x 和 y 即为所求; 否则, y 和 y 即为所求。

唯一性证明

23

- 证明目标
 - $\exists x (P(x) \wedge \forall y (y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$
 - $\exists x P(x) \wedge \forall y \forall z (P(y) \wedge P(z) \rightarrow y = z)$
- 举例， 设 $a \neq 0$, $ax+b=c$ 有唯一的解。

构造性证明法

24

- **证明目标：**证明 $A \rightarrow B$ ，其中 B 具有某种性质的对象
- **证明方法：**在保证 A 为真的条件下构造出具有这种性质的对象
- **例：**

证明：对于每个正整数 n ，存在 n 个连续的正合数。

证：令 $x = (n + 1)!$ ，则 $2|(x + 2)$ ， $3|(x + 3)$ ，
 $\dots$ ， $n|(x + n)$ ， $\dots$ ， $(n + 1)|(x + n + 1)$ 这 n 个连续的正整数为合数，命题得证。 $\square$

反例法(命题为假的证明)

25

- **证明方法：**要证“ $\forall xP(x)$ 为假”，可找一个使“ $\neg P(x)$ 为真”的特例

- **理论依据：**“ $\neg \forall xP(x)$ ” $\Leftrightarrow$ “ $\exists x\neg P(x)$ ”

- **例：**

证明：命题“每个正整数都是三个整数的平方和”为假命题.

证：根据题设，正整数7无法表为三个整数的平方和形式，故原命题为假命题. $\square$

证明中的错误

26

- 数学证明要求每一步均严格按照规则去推理，不要忽略隐式的规则

○ 例：

$$a = b$$

假设 a 和 b 是两个相等的正整数

$$a^2 = ab$$

两边乘以 a

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

两边减去 b^2

$$(a - b)(a + b) = b(a - b)$$

分解

$$a + b = b$$

两边同除以 $a - b$

$$2b = b$$

$$\therefore 2 = 1$$

两边同除以 b

本节提要

问题1：什么叫证明？

- 表明定理为真的有效论证；演绎推理

问题2：常见的证明方法有哪些？

- 直接证明、间接证明、归谬法、分情形证明、等价性证明、存在性证明、唯一性证明

问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想？

猜想

28

□ 猜想

- ▣ 被认为是真的（有意思的）陈述，还未证明其真假
- ▣ 被证明为真：定理
 - 例：庞加莱猜想、四色猜想、费马猜想
- ▣ 被证明为假：推翻
 - 例：费马曾经根据首四个费马数是素数，便猜想所有费马数都是素数
- ▣ 被证明为不可证明
 - 例：连续统假设在集合论公理系统内不可证明/证伪

费马猜想->费马大定理

29

- **Pierre de Fermat (1601-1665), France**
 - ▣ **Fermat's Last Theorem (1637) (费马大定理)**
 - ▣ **$x^n + y^n = z^n$ ($n > 2$, $xyz \neq 0$) 没有正整数解**

- **Andrew Wiles (1953-), Oxford, England**
 - ▣ **1994/1995 完成了费马大定理的证明 (约10年时间)**
 - ▣ **椭圆曲线理论**
 - ▣ **谷山-志村猜想**

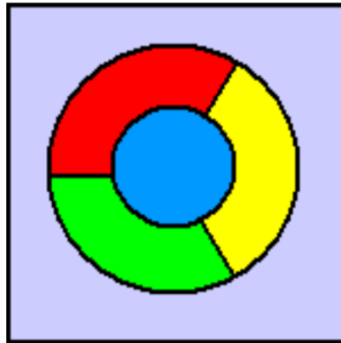
哥德巴赫猜想

30

- **Goldbach Conjecture**（1742年给欧拉的信中）
 - 任一大于5的整数都可写成三个质数之和。
- 欧拉版本（在给哥德巴赫的回信中）
 - 任一大于2的偶数都可写成两个质数之和。
- “ $a+b$ ”猜想
 - 任一充分大的偶数都可以表示成为一个素因子个数不超过 a 的数与另一个素因子不超过 b 的数之和。
- 1966年陈景润（1933—1996）证明了“ $1+2$ ”猜想

四色猜想->四色定理

31



- **Four Color Theorem**

- Proposed by in Francis Guthrie 1852
- **Proven** in 1976 by Kenneth Ira Appel (1932-, New York) and Wolfgang Haken (1928-, Berlin)
 - Percy John Heawood (1861-1955, Britain) proved the five color theorem in 1890

世界数学难题

32

- **Hilbert's problems (23), ICM'1900, Paris**
- **Millennium Prize Problems(7) by the Clay Mathematics Institute in 2000**
 - ▣ 1. P versus NP problem
 - ▣ 2. Hodge conjecture
 - ▣ 3. Poincaré conjecture (solved by Perelman)
 - ▣ 4. Riemann hypothesis
 - ▣ 5. Yang–Mills existence and mass gap
 - ▣ 6. Navier–Stokes existence and smoothness
 - ▣ 7. Birch and Swinnerton-Dyer conjecture

Grigori Perelman (1966-, Russian)

33

In November 2002, Perelman posted the first of a series of eprints to the arXiv, ...

He declined to accept

Fields Medal award in 2006

Millennium Prize award in 2010 (100万美元)



“To do great work, you have to have a pure mind. You can think only about the mathematics. Everything else is human weakness. Accepting prizes is showing weakness.”

本节小结

问题1：什么叫证明？

- 表明定理为真的有效论证；演绎推理

问题2：常见的证明方法有哪些？

- 直接证明、间接证明、归谬法、分情形证明、等价性证明、存在性证明、唯一性证明

问题3：什么是猜想？有哪些有意思的猜想？

- 尚未被证明的可能为真的陈述：费马大定理、四色定理、哥德巴赫猜想、庞加莱定理、黎曼猜想