

离散数学作业

Problem Set 2

第 1 题

用归谬法证明：不存在有理数 r 使得 $r^3 + r + 1 = 0$ 。

提示：设 $r = a/b$ ，其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ ， $b \neq 0$ ，且 a/b 已约至最简。代入方程并同乘 b^3 后，考察 a, b 的奇偶性。

第 2 题

证明下列三个数中存在两个数，它们的乘积为非负数：

$$65^{1000} - 8^{2001} + 3^{177}, \quad 79^{1212} - 9^{2399} + 2^{2001}, \quad 24^{4493} - 5^{8192} + 7^{1777}.$$

说明你的证明是构造性的还是非构造性的，并给出理由。

提示：不要尝试计算这些数。

第 3 题

在黑板上写下整数 $1, 2, \dots, 2n$ ，其中 n 是奇数。每次从中任取两个数 j 和 k ，擦去 j 和 k ，并写下 $|j - k|$ 。重复这一过程，直到黑板上只剩下一个整数。

证明：最后剩下的整数必为奇数。

第 4 题

约定 x, y, z 两两不同，且均不等于题中列出的任何集合。

设 $A = \{x, \{x\}, \{x, y\}, \{\{x, y\}, z\}\}$ 。判断下列命题的真值：

1. $\{x\} \subseteq A$;
2. $z \in A$;
3. $\{\{x, y\}\} \subseteq A$;
4. $\{x, y\} \in \{\{x, y\}, z\}$;
5. $(\{x\} \subseteq A) \rightarrow (z \in \emptyset)$;
6. 设 $B = \{x, y\}$ ，则 B 的幂集是 A 的子集。

第 5 题

使用集合恒等式或谓词逻辑证明：

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
2. $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$;
3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;
4. $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$, 其中 $\oplus$ 表示集合的对称差。

第 6 题

设 A, B 为有限集合。记 $\mathcal{P}(S)$ 为集合 S 的幂集, $A \oplus B$ 为 A 与 B 的对称差。已知

$$|A| = 5, \quad |\mathcal{P}(B)| = 512, \quad |\mathcal{P}(A \oplus B)| = 1024.$$

求 $|B|$ 、 $|A \cap B|$ 、 $|A \cup B|$ 、 $|A \setminus B|$ 和 $|B \setminus A|$ 。

第 7 题

设 $A = \{1, 2, 3, 6, 12\}$, 在 A 上定义关系 R :

$$aRb \iff a \mid b.$$

列出 R 中的所有有序对, 并判断 R 是否具有自反性、对称性、反对称性和传递性。 R 是否为等价关系? 是否为偏序关系? 若为偏序关系, 请画出其 Hasse 图。

第 8 题

在整数集 $\mathbb{Z}$ 上定义关系 R :

$$aRb \iff 5 \mid (a - b).$$

证明 R 是等价关系, 并写出它的所有不同等价类以及商集 $\mathbb{Z}/R$ 。

第 9 题

判断下列函数是否为从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的单射、满射或双射，并说明理由：

1. $f(x) = 2x + 1$;

2. $g(x) = x^3$;

3. $h(x) = x^2$;

4. $k(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

第 10 题

设 $f: A \rightarrow B$ 为函数, $X, Y \subseteq A$, $U, V \subseteq B$, 并用 $f^{-1}(U)$ 表示 U 在 f 下的原像。
证明:

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$;
2. $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$;
3. $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$;
4. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$ 。

再给出一个例子, 使第 2 小题中的包含关系为真包含, 并说明当 f 满足什么条件时, 第 2 小题对所有 $X, Y \subseteq A$ 均可取等号。

提交说明

提交入口 <https://box.nju.edu.cn/u/d/9116c30ff7e7427db9d6/>

提交文件 请提交 PDF: 可由 LaTeX 生成, 或手写答案扫描。

作答要求 无需抄写题目; 请在答案中标明对应题号。